BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2015

УДК 517.927.25

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

К.К.ГАСАНОВ*, Х.Т.ГУСЕЙНОВА*, Х.Е.АББАСОВА**

****Бакинский Государственный Университет,***

**** Азербайджанский Государственный Экономический Университет***

hxanim@inbox.ru

Рассматривается задача об оптимальном управлении линейной импульсной системы с минимизацией квадратичного функционала при условии, что в заданное время система должна достичь желаемого состояния. Для исследования задача сводится к проблеме моментов. Построено такое функциональное гильбертово пространство, в котором минимизируемое выражение представляется в виде нормы для функционала над этим пространством. При этом используется альтернатива Фредгольма для интегрального уравнения с действительным симметричным ядром. Задача подобного рода для обыкновенной линейной системы рассмотрена в работах [1,3,4,7-9].

Ключевые слова: импульсная система, ограниченная вариация, функционал, гильбертово пространство, интегральные уравнения, проблема моментов, управление.

1. Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается линейной импульсной системой

$$Dx(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t)Du(t), \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0-) = x^0, \tag{2}$$

где матрицы $A(t)-(n\times n),\ B(t)-(n\times r),\ C(t)-(n\times r)$ непрерывны при $t\in[0,T]$.

Допустимые управления $u(t)$ являются непрерывными справа r-мерными вектор-функциями ограниченной вариации на $[0,T]$, каждая из которых определена на некотором открытом интервале в окрестности отрезка $[0,T]$ [5]. Каждое такое управление определяет на $[0,T]$ некоторую меру $Du(t)$. Множество допустимых управлений обозначим через $VB_r(0,T)$.

Пусть $\Phi(t)$ фундаментальная матрица однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{3}$$

удовлетворяющая условию $\Phi(0)=I$ (где I – единичная матрица).

Для каждого управления $u(t)$, соответствующее решение $x(t)$ уравнения (1) с начальным условием (2), представляется формулой

$$x(t)=\Phi(t)x^0+\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds+\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)C(s)Du(s), \qquad (4)$$

где последний интеграл понимается в смысле Римана-Стилтьеса. Отметим, что решение $x(t)$ также является функцией ограниченной вариации. Пусть управление $u(t)\in VB_r(0,T)$ переводит систему (1) из состояния (2) в состояние $x(T)=x^1$. Тогда, пользуясь формулой (4), имеем:

$$\int_0^T \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds+\int_0^T \Phi^{-1}(s)C(s)Du(s)=\Phi^{-1}(T)(x^1-\Phi(T)x^0)\cdot \qquad (5)$$

Таким образом, уравнение (5) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы управление $u(t)$ переводило систему (1) из состояния x^0 в состояние x^1.

Задача. Среди допустимых управлений $u(t)$ требуется найти управление такое, что к заданному моменту T переводило систему (1) из состояния (2) в состояние x^1 и функционал

$$J(u)=x^1(T)Fx(T)+\int_0^T [x'(t)W(t)x(t)+u'(t)U(t)u(t)]dt \qquad (6)$$

достигал наименьшего значения, где $F-(n\times n)$ неотрицательная и симметричная постоянная матрица, $W(t)-(n\times n)$ – симметричная, неотрицательная и непрерывная, а $U(t)-(r\times r)$ положительно-определенная и непрерывная матрица. Такое управление называется оптимальным управлением.

2. Метод решения. В дальнейшем для простоты предположим, что $x^0=0$, $F=0$, $B(t)\equiv 0$, $t\in[0,T]$.

Подставляя в (6) решение (4) задачи (1),(2), имеем

$$J(u)=\int_0^T\left[\left(\int_0^t \Phi^{-1}(s)C(s)Du(s)\right)'\Phi'(t)W(t)\Phi(t)\left(\int_0^t \Phi^{-1}(s)C(s)Du(s)\right)\right]dt+$$
$$+\int_0^T u'(t)U(t)u(t)dt\cdot \qquad (7)$$

Отсюда, меняя порядок интегрирования, получим

$$J(u)=\int_0^T\left(\Phi^{-1}(t)C(t)Du(t)\right)'\int_t^T \Phi'(s)W(s)\Phi(s)\left(\int_0^S \Phi^{-1}(\tau)C(\tau)Du(\tau)\right)ds+$$
$$+\int_0^T u'(t)U(t)u(t)dt\cdot \qquad (8)$$

Далее, с помощью функции Хевисайда $\theta(t)$ [2] можно написать

$$\int_t^T \Phi'(s)W(s)\Phi(s)\left(\int_0^S \Phi^{-1}(\tau)C(\tau)Du(\tau)\right)ds =$$

$$=\int_t^T \Phi'(s)W(s)\Phi(s)\left(\int_0^T \theta(t-\tau)\Phi^{-1}(\tau)C(\tau)Du(\tau)+\right.$$

$$\left.+\int_0^T \theta(\tau-t)\theta(s-\tau)\Phi^{-1}(\tau)C(\tau)Du(\tau)\right)ds\,. \tag{9}$$

Положим

$$K(t,\tau)=\begin{cases} C'(t)(\varPhi^{-1}(t))'\int_t^T \Phi'(s)W(s)\Phi(s)ds\Phi^{-1}(\tau)C(\tau), & t\ge\tau, \\ C'(\tau)(\Phi^{-1}(\tau))'\int_\tau^T \Phi'(s)W(s)\Phi(s)ds\Phi^{-1}(t)C(t), & t\le\tau. \end{cases} \tag{10}$$

Можно непосредственно убедиться в том, что $K(t,\tau)$ является непрерывной по совокупности переменных симметричной, неотрицательной матрицей. Учитывая (9), после некоторых преобразований функционал (8) можно выразить следующим образом:

$$J(u)=\int_0^T\int_0^T (Du(t))'K(t,\tau)Du(\tau)+\int_0^T u'(t)U(t)u(t)dt\,. \tag{11}$$

3. Построение гильбертово пространства. Для сведения задачи к проблеме моментов, построим функциональное пространство $H_r(0,T)$, состоящее из всех элементов $VB_r(0,T)$, скалярное произведение в котором определимо формулой

$$(u,v)=\int_0^T\int_0^T (Du(t))'K(t,\tau)Dv(\tau)+\int_o^T u'(t)U(t)u(t)dt\,. \tag{12}$$

Легко можно проверить, что скалярное произведение (12) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Нетрудно показать, что пространство $H_r(0,T)$ является полным и сепарабельным гильбертовым пространством. Как известно из [2] общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве $H_r(0,T)$ имеет вид

$$L(p)=(p,v)=\int_0^T\int_0^T (Dp(t))'K(t,\tau)Dv(\tau)+\int_0^T p'(t)U(t)v(t)dt\,, \tag{13}$$

где $v(t)$ некоторый элемент в $H_r(0,T)$. При этом

$$\|L\|^2=\|Dv\|^2=\int_0^T\int_0^T (Dv(t))'K(t,\tau)Dv(\tau)+\int_0^T v'(t)U(t)v(t)dt\,. \tag{14}$$

4. Проблема моментов. Обозначим через $h_i(t) - i$-ую строку матрицы $\Phi(T)\Phi^{-1}(t)C(t)$ и предположим, что $h_1(t), h_2(t), ...h_n(t)$ линейно независимы при $t \in [0,T]$, обозначим через $p_i(t)$ решение интегрального уравнения

$$\int_0^T K(t,\tau)Dp(\tau) + U(t)p(t) = h_i'(t), \qquad i = 1,2,...,n. \tag{15}$$

Тогда векторы $p_1(t), p_2(t),...., p_n(t)$ также являются линейно независимыми при $t \in [0,T]$.

Отметим, что уравнение (15) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода и для него справедлива альтернатива Фредгольма [6]. Поставленная оптимальная задача сводится к нахождению функции $u(t) \in H_r(0,T)$, для которой выполнялись бы условия

$$\int_0^T\int_0^T (Du(t))'K(t,\tau)Dp_i(\tau) + \int_0^T u'(t)U(t)p_i(t)dt = x_i^1, \; i = 1,2,...,n, \tag{16}$$

$$\|Du\|^2 = \int_0^T\int_0^T (Du(t))'K(t,\tau)Du(\tau) + \int_0^T u'(t)U(t)u(t)dt \to \min, \tag{17}$$

где $p_i(t)$ $(i = 1,2,...,n)$ – решение уравнения (15) , x_i^1 ($i = 1,2,...,n$) координаты точки x^1.

Таким образом, исходная задача сведена к задаче (16), (17), которая является проблемой моментов. Оптимальное управление определяется следующим образом:

$$u^0(t) = \lambda^2 \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}_i p_i(t), \tag{18}$$

где $p_i(t)$ $(i = 1,2,...,n)$ – решение уравнения (15). Коэффиценты $\tilde{\mu}_i$ определяются из условия

$$\lambda^{-2} = \min_{\mu_1,...,\mu_n} \left\{ \int_0^T\int_0^T \left(\sum_{i=1}^n (D\mu_i p_i(t)) \right)' K(t,\tau) \sum_{i=1}^n D(\mu_i p_i(\tau)) + \right.$$
$$\left. + \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n \mu_i p_i(t) \right)' U(t) \sum_{i=1}^n \mu_i p_i(t)dt \right\} \tag{19}$$

при условии

$$\mu_1 x_1^1 + \mu_2 x_2^1 ..... + \mu_n x_n^1 = 1. \tag{20}$$

В силу неотрицательности матрицы $K(t,\tau)$ и положительно определенности матрицы $U(t)$, следует, что решение задачи (19) и (20) существует. Отметим, что числа $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, ..., \tilde{\mu}_n$ также можно определить из решения «сопряженной задачи»: найти

$$\lambda^2 = \max_{\mu_1,\dots,\mu_n} (\mu_1 x_1^1 + \mu_2 x_2^1 +,\dots, \mu_n x_n^1) \tag{21}$$

при условии

$$\int_0^T\int_0^T \left(D\left(\sum_{i=1}^n \mu_i p_i(t) \right)\right)' K(t,\tau) D\left(\sum_{i=1}^n \mu_i p_i(\tau)\right) +$$

$$+ \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n \mu_i p_i(t) \right) U(t) \sum_{i=1}^n \mu_i p_i(t) dt = 1. \tag{22}$$

5. Пример. Рассмотрим импульсное уравнение

$$Dx = u + Du,$$

где скалярные управления $u(t)$, обладают ограниченной вариацией в некоторой окрестности отрезка $0 \le t \le 1$. Требуется найти такое управление $u(t)$, которое переводило бы систему из точки $x(-0) = 0$ в точку $x(1) = 2$ и минимизировало критерий качества

$$J(u) = \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt .$$

Можно показать, что управление

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & при \quad t < 0, \\ 1, & при \quad 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

является искомым.

Для этого управление уравнение можно написать в виде

$$Dx = 1 + \delta(t), \quad x(-0) = 0,$$

где $\delta(t)$ функция Дирака [2].

Следовательно, соответствующее решение системы

$$x^*(t) = \begin{cases} 0 & при \quad t < 0, \\ 1 + t & при \ 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

При этом минимальное значение критерия качества равно

$$J(u^*) = \int_0^1 (x^{*2}(t) + u^{*2}(t)) dt = \frac{10}{3} .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968, 476 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972, 496 с.
3. Куржанский А.В. О построении методом моментов оптимального управления, минимизирующего среднеквадратичную ошибку // Автоматика и телемеханика, т. XXV, №3, 1964, с.624-630.
4. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемехани-

ка, т. XXI , № 4,5, 1960, т. XXII, №4, 1961.
5. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 576 с.
6. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Наука, 1965, 128 с.
7. Гасанов К.К., Мазамов А.Д. Управляемость линейных импульсных систем с последействием // Вестник БГУ, серия физ.-мат. наук, Баку, 2003, №1, с.77-86.
8. Гасанов К.К., Гусейнова Х.Т. On existence and Uniqueness of the Solution to Inertial Boundary Value Problem for the First Order Partial Linear System // Advances and Applications in Mathematical Sciences, vol.II, ISSUL 3, January, 2012, p.115-124.
9. Гасанов К.К., Гусейнова Х.Т. Оптимальное управление линейных систем с обобщенными управлениями // Вестник БГУ, серия физ.-мат. наук, Баку, 2013, №1, с.25-33.

XƏTTİ İMPULS SİSTEMLƏR ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN MOMENTLƏR ÜSULU İLƏ TƏDQİQİ

K.Q.HƏSƏNOV, X.T.HÜSEYNOVA, X.E.ABBASOVA

XÜLASƏ

İşdə xətti impuls sistemlərlə təsvir olan proseslər üçün aşağıdakı kimi optimal idarəetmə məsələsinə baxılır: mümkün idarəedicilər arasında eləsini tapmaq tələb olunur ki, o verilmiş zaman müddətində sistemi arzu olunan vəziyyətə gətirsin və bu zaman verilmiş funksional minimum qiymət alsın. Bu məsələ momentlər probleminə gətirməklə öyrənilir. Bunun üçün elə Hilbert funksiyalar fəzası düzəldilir ki, bu fəzada minimallaşdırılan funksional həmin fəzada norma olur və məsələ minimal enerji məsələsinə gətirilir. Bu zaman simmetrik nüvəli ikinci növ Fredholm inteqral tənliyi alınır.

Açar sözlər: impuls sistemi, məhdud variasiya, funksional, Hilbert fəzası, inteqral tənliklər, momentlər problemi, idarəetmə

RESEARCH OF A PROBLEM OF OPTIMAL MANAGEMENT FOR THE LINEAR IMPULSIVE SYSTEM BY THE METHOD OF MOMENTS

K.G.HASANOV, Kh.T.HUSEYNOVA, Kh.E.ABBASOVA

SUMMARY

İn this work the task about optimum control of linear pulse system with minimization of square functionality is considered. Under some condition in the set time the condition of the system has to reach a desirable state. For research, the task is reduced to a problem of the moments. Such functional Hilbert space in which the minimized space expression would be presented in the norm form for functionality over this space is constructed. The Fredholm's alternatives of the integrated equation with the valid symmetric kernel are used.

Key words: impulsive system, limit variation, functional, Hilbert space, integral equalizations, problem of moments, management

Поступила в редакцию: 17.03.2015 г.
Подписано к печати: 18.06.2015 г.